Université Claude Bernard Lyon 1
Année universitaire 2014-2015

Techniques Mathématiques de Base
Licence 1 (PCSI)

FEUILLE 3 : VALEURS INTERMÉDIAIRES, FONCTIONS DÉRIVABLES

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 1
Montrer que chacune des équations ci-dessous a au moins une solution :
1) $\cos\theta = 1/7$, d'inconnue réelle θ.
2) $x^5 + 17x^3 + x^2 + x + 49 = 0$, d'inconnue réelle x.
3) $3\tan\varphi = \varphi + 1$, d'inconnue $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4) $3\tan\varphi = \varphi + 100$, d'inconnue $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Théorème de Rolle

Exercice 2
On s'intéresse à l'équation :

$$(E) \qquad x^{2014} + 18x - 7 = 0, \text{ d'inconnue réelle } x.$$

On note $f(x) = x^{2014} + 18x - 7$.

1) En invoquant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que (E) a au moins une solution positive et au moins une solution négative.

2) En invoquant le théorème de Rolle, montrer qu'entre deux solutions (distinctes) de (E) il y a forcément une solution de l'équation $f'(x) = 0$.

3) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ et compter ses solutions.

4) Montrer que l'équation (E) a exactement deux solutions.

Inégalité des accroissements finis

Exercice 3
Montrer les inégalités suivantes :

1) Pour tous réels α et β, $|\cos\alpha - \cos\beta| \leq |\alpha - \beta|$.

2) Pour tout réel positif φ, $\sin\varphi \leq \varphi$.

Exercice 4
Montrer que pour tout entier $k \geq 1$:

$$0 \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Comment se comporte la suite (H_n) de terme général $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini ?

Calcul de fonctions dérivées

NB : aux exercices 5 à 9, on ne se posera aucune question relative aux ensembles de définition ou de dérivabilité, il est implicite que les variables appartiennent à des intervalles où il n'y a pas de souci.

Exercice 5

Pour chacune des expressions $y(t)$ ci-dessous, calculer $\dfrac{dy}{dt}$:

1) t^4+3t^2-6 2) $6t^{7/2}+4t^{5/2}-2t$ 3) $\sqrt{3t}+\sqrt[3]{t}+\dfrac{1}{t}$ 4) te^t 5) t^2e^t 6) $t(t+3)e^t$

7) $t\sin t\ln t$ 8) $\dfrac{5-t}{5+t}$ 9) $\dfrac{t^3}{1+t^2}$ 10) $\dfrac{t^3+1}{t^2-t-2}$ 11) $\dfrac{\ln t}{t^3}$ 12) $\dfrac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}$

13) $\dfrac{\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{t}}$ 14) $\dfrac{\cos t}{\sin t}$ 15) $\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$.

Exercice 6

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, calculer la fonction dérivée f' :

1) $f(x)=e^{3x}$ 2) $f(x)=\cos(5x)$ 3) $f(x)=\ln(2x)$ 4) $f(x)=\ln(|2x|)$

5) $f(x)=\ln(-2x)$ 6) $f(x)=(1-x)^{7/3}$ 7) $f(x)=\sin(\cos x)$ 8) $f(x)=\sin(\cos(3x))$

9) $f(x)=\ln(\sin^2 x)$ 10) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x+1}$ 11) $f(x)=e^{-x^2}$ 12) $f(x)=2^{\ln x}$

13) $f(x)=\dfrac{\sqrt{5+4x}}{1+2\sqrt{1+x}}$ 14) $f(x)=\ln(|e^{2i\pi x}|)$.

Exercice 7

1) On considère la fonction f définie par : $f(t)=\dfrac{t^2+2}{1+t}$. Calculer ses dérivées successives, jusqu'à la dérivée sixième f'''''' (qu'on peut préférer noter $f^{(6)}$).

2) Pour n entier positif, calculer $\dfrac{d}{d\theta}(\tan^n\theta)$. En s'appuyant sur ce résultat, calculer les dérivées successives de la fonction tangente, jusqu'à la dérivée cinquième.

Exercice 8

On note :

$$x=\sin\theta \qquad y=\frac{1+x}{1-x} \qquad r=\sqrt{y} \qquad \text{et enfin } f(r)=\ln r$$

1) Faire explicitement la composition de tous ces changements de variable : on exprimera successivement $y(\theta)$ fonction de θ, puis $r(\theta)$ fonction de θ, et enfin $f(\theta)$ fonction de θ.

2) Calculer dans un premier temps les expressions $\dfrac{dx}{d\theta}$, fonction de θ, $\dfrac{dy}{dx}$, d'abord fonction de x puis fonction de θ, $\dfrac{dr}{dy}$ fonction de y, puis de x puis de θ et enfin $\dfrac{df}{dr}$, fonction de r puis de y puis de x puis de θ.

3) Utiliser tout ça pour donner une expression simple de $f'(\theta)$.

Exercice 9

Calculer les dérivées $\dfrac{df}{dx}$ des expressions $f(x)$ ci-dessous :

1) $\sqrt{\cos^2 x+1}$ 2) $\ln(\sqrt{1-2\sin^2 x})$ 3) $x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

4) $\ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$ 5) $\ln|\tan(x/2)|$ 6) $\ln[\tan(x/2+\pi/4)]$

7) x^x 8) $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x}$ 9) $\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$.

Exercice 10

Préciser le domaine de définition et le domaine de dérivabilité, puis calculer les dérivées des fonctions f données par les formules ci-dessous :

a) $\ln\left[(2x-10)^6\right]$ b) $\sqrt{4x-5}$ c) $\sqrt{6x-5-x^2}$.